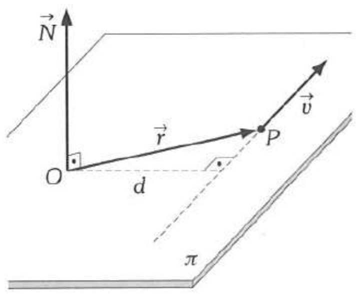
**Momento de un vector con respecto a un punto:** Es un vector:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}(v_x, v_y, v_z) \\ P(x, y, z) \\ O(x_0, y_0, z_0) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$




Momento de un vector respecto de un punto.

**Momento de un vector con respecto a un eje:** Es un escalar

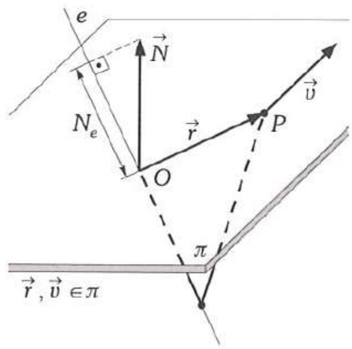
$$N_e = \text{proy}_e\, (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$$

($\boldsymbol{r}$ vector de posición de $\boldsymbol{v}$ respecto a cualquier punto del eje).

Si $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del eje, entonces:

$$N_e = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$N_e = \text{proy}_e\, (\vec{r} \times \vec{v})$




Momento de un vector respecto de un eje.

**Resultante de un sistema de vectores deslizantes. Momento resultante del sistema:**

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \qquad \boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$$

**Cambio de centro de reducción** (de $O$ a $O'$): $\quad \boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{R}$

**Eje central**: «Es el lugar geométrico de los puntos del espacio para los cuales el momento del sistema es mínimo, o lo que es lo mismo, el momento del sistema tiene la misma dirección que $\boldsymbol{R}$».

Su ecuación es:

$$\frac{N_x + R_y z - R_z y}{R_x} = \frac{N_y + R_z x - R_x z}{R_y} = \frac{N_z + R_x y - R_y x}{R_z}$$

**Torsor:** Se define así al conjunto de vectores $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{N}_R)$ en el que $\boldsymbol{R}$ es la resultante del sistema de vectores y $\boldsymbol{N}_R$ el momento mínimo (que como ya hemos dicho tiene la dirección de $\boldsymbol{R}$) cuyo valor es:

$$\boldsymbol{N}_R = \frac{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{R}}{R^2} \boldsymbol{R}$$

**Sistemas de vectores ligados y paralelos:** Supongamos $n$ vectores aplicados $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, todos ellos paralelos y cuyos puntos de aplicación vienen definidos por $\boldsymbol{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $\boldsymbol{r}_n(x_n, y_n, z_n)$. Si $\boldsymbol{R}$ es la resultante de todos ellos y $\boldsymbol{N}$ el momento resultante, éstos serán siempre perpendiculares, y su torsor se reducirá a $\boldsymbol{R}$.

Si llamamos $\boldsymbol{u}$ al vector unitario que tiene la dirección de los vectores, tendremos: $\boldsymbol{v}_i = v_i \boldsymbol{u}$, *siendo $v_i$ un número real, cuyo valor absoluto es igual al módulo del vector $\boldsymbol{v}_i$, con signo positivo o negativo, según que el sentido del vector $\boldsymbol{v}_i$ sea el mismo o el contrario al del vector unitario $\boldsymbol{u}$.* Obsérvese que en estas condiciones el módulo del vector resultante $\boldsymbol{R}$ será: $R = \Sigma\, v_i$.

Si consideramos al sistema de vectores paralelos al eje $OZ$, la ecuación del eje central es:

$$x = -\frac{N_y}{R_z} = \frac{\Sigma\, v_i y_i}{R} \qquad y = \frac{N_x}{R_z} = \frac{\Sigma\, v_i x_i}{R}$$

**Coordenadas del centro del sistema de vectores ligados y paralelos:**

$$\xi = \frac{\Sigma\, v_i x_i}{R} \qquad \eta = \frac{\Sigma\, v_i y_i}{R} \qquad \zeta = \frac{\Sigma\, v_i z_i}{R}$$